Modelagem com Equações Diferenciais

Módulo 1

Introdução geral às equações diferenciais

Fernando Deeke Sasse

1 Modelagem de um fenômeno

Suponhamos que a função $y = f(x)$ expressa quantitativamente um fenômeno. Ao estudar este fenômeno é em geral impossível estabelecer diretamente a dependência entre y e x. Entretanto, em muitos casos é possível determinar uma relação entre as magnitudes x, y, e as derivadas de y com relação a x, y', y'', …, $y^{(n)}$, ou seja, o fenômeno pode ser descrito através de uma *equação diferencial*.

A partir da dependência obtida entre x, y e as derivadas devemos determinar direta entre x e y, ou seja, determinar $y = f(x)$ para os apropriados intervalos em x. Tal processo é denominado *integração de uma equação diferencial*. Antes de apresentarmos exemplos concretos é conveniente introduzir alguns conceitos formais.

2 Definições e Classificação de EDOs

Uma *equação diferencial* (EDO) é uma equação que estabelece uma relação entre a variável independente x, a função buscada $y = f(x)$ e suas derivadas y', y'', …, $y^{(n)}$. Aqui usamos a notação $y' := \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$, etc. Um exemplo de equação diferencial ordinária é o seguinte:

$$y'' + y' + 2xy = 3\,. \tag{1}$$

O termo *ordinária* refere-se ao fato de que a função desconhecida $y = f(x)$ depende somente de uma variável. Caso contrário, como veremos mais adiante, é denominada *parcial* (EDP).

A *ordem* da equação diferencial é dada pela ordem mais alta da derivada que aparece na equação. Por exemplo, a ordem da eq. (1) é 2.

De um modo geral, uma equação diferencial ordinária (EDO) de ordem n pode ser expressa na seguinte forma.

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0\,, \tag{2}$$

ou, usando a notação estendida,

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0\,. \tag{3}$$

O *grau* de uma equação diferencial é o grau da potência da derivada mais alta. Por exemplo,

$$(y''')^2 + x(y')^3 + y^4 = 0\,, \tag{4}$$

é uma equação de terceira ordem e segundo grau.

3 Solução de uma equação diferencial

Resolver, ou integrar, uma equação diferencial significa determinar a função ou funções que satisfazem a equação diferencial. Por exemplo, $y_1 = \mathrm{e}^x$ é uma solução da equação

$$y'' - y = 0\,. \tag{5}$$

Em outras palavras, $y_1 = \mathrm{e}^x$ satisfaz identicamente a equação diferencial (5), como é evidente, se substituirmos y por y_1 na equação. Similarmente, $y_2 = \cosh x$ é outra solução de (5). Verifique tal fato.

Uma *solução particular* da EDO (5) é uma função $y = f(x)$, definida no intervalo $a < x < b$, admitindo derivadas de ordem até n no intervalo, e satisfazendo (5) identicamente. No caso da eq. (5), $y_1 = \mathrm{e}^x$ e $y_2 = \cosh x$ são duas soluções particulares. Notemos ainda que $C_1y_1 + C_2y_2$, sendo C_1 e C_2 constantes arbitrárias, é também solução de (5), como pode ser verificado simplesmente substituindo esta função na equação.

O objetivo central da teoria de equações diferenciais é desenvolver técnicas para resolver equações diferenciais. Quando uma expressão exata analítica é encontrada para a solução da equação diferencial, dizemos que esta é uma solução exata. Em muitos casos, no entanto, não é possível encontrar uma solução exatas, mas somente aproximada. No caso em que não é possível encontrar uma solução exata ou aproximada, é possível recorrer ainda às chamadas técnicas numéricas de solução. Neste caso, a solução é apresentada na forma de um gráfico ou tabela.

Neste curso abordaremos essencialmente equações diferenciais que possuem soluções exatas, mas mostraremos também, brevemente, como obter soluções numéricas.

4 Equações lineares e não-lineares

Uma classificação importante das equações diferenciais consiste na distinção entre equações diferenciais *linearese* *não-lineares*. Uma EDO geral da forma (2) é denominada *linear* se F é uma função linear das variáveis y, y', ..., $y^{(n)}$. Uma definição similar é aplicável a EDPs. Portanto, a equação diferencial linear ordinária geral de ordem n deve ter a forma

$$a_0(x)y^n + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = g(x)\,. \tag{6}$$

Por exemplo, equações diferenciais

$$y''' + y' + x^2y = 0\,, \tag{7}$$
$$y' + e^x y = 0\,, \tag{8}$$

são lineares, enquanto que as equações

$$y'' + (y')^2 + y = 0\,, \tag{9}$$
$$y'' + \sin y = 0\,, \tag{10}$$
$$y'' + yy' + xy = 0 \tag{11}$$

são não-lineares. EDOs não-lineares, em geral, são muito difíceis de serem resolvidas exatamente e exigem tratamento aproximado, qualitativo ou numérico, como veremos mais adiante.

5 Problemas Propostos

Em cada um dos problemas determine a ordem da equação diferencial e também classifique-a quanto à linearidade.

1. $x^2y'' + xy' + 2y = \sin x\,,$ **2**. $(1 + y^2)y'' + xy' + y = e^x\,,$
3. $y^{(iv)} + y''' + y'' + y' + y = e^x\,,$ **4**. $y' + xy^2 = 0\,,$
5. $y'' + \sin(x + y) = \sin x\,,$ **6**. $y''' + xy' + y\cos^2 = x^3\,.$

Em cada um dos problemas abaixo verifique que a dada função é uma solução da equação diferencial.

7. $y'' + y = 0\,, \quad y_1 = A\cos x\,, \quad y_2 = B\sin(x)\,, \qquad A, B = const.$
8. $y'' + 2y' - 3y = 0\,, \quad y_1 = e^{-3x}\,, y_2 = e^x\,,$
9. $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0\,, \quad x > 0\,, \quad y_1 = \dfrac{1}{x^2}\,, \quad y_2 = x^{-2}\ln x\,,$
10. $y'' + y = \sin x\,, \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2}\,, \quad y = \cos x\ln(\cos x) + x\sin x\,,$
11. $y' - 2xy = 1\,, \quad y = \exp(x^2)\displaystyle\int_0^x \exp(-t^2)dt + \exp(x^2)\,.$

Em cada um dos problemas abaixo determine os valores de r para os quais a dada equação diferencial tem soluções da forma $y = e^{rx}$ ou $y = x^r$.

12. $y' + 2y = 0\,,$ **13**. $y'' + y' - 6y = 0\,,$ **14**. $y'' - y = 0\,,$
15. $x^2y'' + 4xy' + 2y = 0\,,$ **16**. $x^2y'' + 4xy' + 4y = 0\,.$